Geometria spinorów Pauliego

Cezary Juszczak
Uniwersytet Wrocławski

20 luty 2012

Motywacja

- W przypadku wektorów mamy reguły dodawania, mnożenia przez liczbę i obliczania iloczynu skalarnego nie odwołujące się do współrzędnych.
- Czy można analogiczne reguły znaleźć dla spinorów?
- Jak w takim razie wyobrażać sobie spinor?
- Moduł iloczynu skalarnego spinorów nie zależy od ich faz. Czym jest spinor jeśli zaniedbamy jego fazę?

Lemat

Dla każdego spinora $\psi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ *istnieje taki kierunek* $\vec{n}$, *że*

$$\vec{n}\vec{\sigma}\psi = \psi$$

Wektor jednostkowy $\vec{n}$ *nazywamy* **kierunkiem** *spinora* ψ.

Dowód: Jeśli $a = 0$, to $\vec{n} = (0, 0, -1)$, ponieważ

$$-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}.$$

Jeśli $a \neq 0$, to można podzielić ψ przez a i ograniczyć się do spinorów postaci $\psi = \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix}$.

Każda liczba zespolona $c \in C$ da się przedstawić postaci:

$$c = \frac{n_x + n_y i}{1 + n_z} \tag{1}$$

dla pewnych $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$. Rzeczywiście, z (1) wynika, że:

$$c\bar{c} = \frac{n_x^2 + n_y^2}{(1 + n_z)^2} = \frac{1 - n_z}{1 + n_z}$$

a zatem:

$$n_z = \frac{1 - c\bar{c}}{1 + c\bar{c}}, \qquad n_x = \frac{2}{1 + c\bar{c}} \mathrm{Re}\, c, \qquad n_y = \frac{2}{1 + c\bar{c}} \mathrm{Im}\, c.$$

Wielkości n_x, n_y, n_z spełniają (1) dla dowolnego $c \in C$.

Okazuje się, że $\vec{n} \equiv (n_x, n_y, n_z)$ jest kierunkiem spinora $\begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix}$.

Równość $\vec{n}\vec{\sigma}\psi = \psi$ wynika z faktu, że ψ jest proporcjonalne do pierwszej kolumy macierzy

$$(1 + \vec{n}\vec{\sigma}) = \begin{pmatrix} 1 + n_z & n_x - n_y i \\ n_x + n_y i & 1 - n_z \end{pmatrix}$$

oraz tego, że $(\vec{n}\vec{\sigma})^2 = 1$.

Dokładniej

$$\vec{n}\vec{\sigma}\psi = \vec{n}\vec{\sigma}\frac{1 + \vec{n}\vec{\sigma}}{1 + n_z}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\vec{n}\vec{\sigma} + 1}{1 + n_z}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \psi.$$

Lemat

Obrót spinora ψ wokół kierunku własnego $\vec{n}$ o kąt α jest reprezentowany przez pomnożenie przez liczbę $e^{i\frac{1}{2}\alpha}$

$$e^{i\frac{1}{2}\alpha\vec{n}\vec{\sigma}}\psi = e^{i\frac{1}{2}\alpha}\psi$$

Dowód: Biorąc pod uwagę równość $\vec{n}\vec{\sigma}\psi = \psi$, po rozwinieciu $e^{i\frac{1}{2}\alpha\vec{n}\vec{\sigma}}\psi$ w szereg, wyrazy $\vec{n}\vec{\sigma}$ można zastąpić jedynkami, bo są mnożone z prawej strony przez ψ. Po zwinięciu szeregu otrzymamy $e^{i\frac{1}{2}\alpha}\psi$.

Norma iloczynu skalarnego spinorów jest iloczynem ich norm i cosinusa połowy kąta między ich kierunkami.

Lemat

Jeśli $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$ są kierunkami spinorów ψ_1 i ψ_2 to

$$|\psi_1^\dagger \psi_2| = |\psi_1||\psi_2| \cos\frac{\alpha}{2}.$$

gdzie α jest kątem między wektorami $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$.

Dowód: Każdy spinor o kierunku $\vec{n}$ jest proporcjonalny do pierwszej kolumny macierzy $1 + \vec{n}\vec{\sigma}$ (do drugiej zresztą też, bo $\det(1 + \vec{n}\vec{\sigma}) = 0$), twierdzenie wystarczy więc udowodnić dla spinorów unormowanych:

$$\psi(\vec{n}) \equiv \frac{1}{\sqrt{2+2n_z}} \begin{pmatrix} 1+n_z \\ n_x+n_y i \end{pmatrix}$$

Uwaga: powyższy wzór nie ma sensu, gdy $n_z = -1$. Wtedy należy użyć drugiej kolumny:

$$\psi(\vec{n}) \equiv \frac{1}{\sqrt{2-2n_z}} \begin{pmatrix} n_x-n_y i \\ 1-n_z \end{pmatrix}$$

W dalszej części dowodu zamiast $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ piszemy odpowiednio $\vec{n}$ oraz $\vec{n}'$.

$$\psi^\dagger(\vec{n})\psi(\vec{n}') = \frac{(1+n'_z)(1+n_z) + n'_x n_x + n'_y n_y + i(n'_x n_y - n'_y n_x)}{2\sqrt{(1+n_z)(1+n'_z)}}$$

Zatem

$$\begin{aligned}
|\psi^\dagger(\vec{n})\psi(\vec{n}')|^2 &= \frac{((1+n'_z)(1+n_z) + n'_x n_x + n'_y n_y)^2 + (n'_x n_y - n'_y n_x)^2}{4(1+n_z)(1+n'_z)} \\
&= \frac{((1+n'_z)^2(1+n_z)^2 + 2(1+n_z)(1+n'_z)(n'_x n_x + n'_y n_y)}{4(1+n_z)(1+n'_z)} \\
&\quad + \frac{(n'_x n_x + n'_y n_y)^2 + (n'_x n_y - n'_y n_x)^2}{4(1+n_z)(1+n'_z)} \\
&= \frac{(1+n'_z)(1+n_z) + 2(n'_x n_x + n'_y n_y)}{4} \\
&\quad + \frac{(n'_x n_x)^2 + (n'_y n_y)^2 + (n'_x n_y)^2 + (n'_y n_x)^2}{4(1+n_z)(1+n'_z)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{((1+n'_z)(1+n_z)+2(n'_x n_x + n'_y n_y)}{4} + \frac{({n'_x}^2 + {n'_y}^2)(n_x^2 + n_y^2)}{4(1+n_z)(1+n'_z)} \\
&= \frac{((1+n'_z)(1+n_z)+2(n'_x n_x + n'_y n_y)}{4} + \frac{(1-{n'_z}^2)(1-n_z^2)}{4(1+n_z)(1+n'_z)} \\
&= \frac{((1+n'_z)(1+n_z)+2(n'_x n_x + n'_y n_y)}{4} + \frac{(1-n'_z)(1-n_z)}{4} \\
&= \frac{((2+2(n'_x n_x + n'_y n_y + n'_z n_z)}{4} \\
&= \frac{1+\vec{n}\vec{n}'}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} = \cos^2\frac{\alpha}{2}
\end{aligned}
$$

Jeśli kierunek spinora jest we współrzędnych sferycznych wyrażony przez $(1, \theta, \phi)$ to spinor ten w bazie składającej się ze spinorów skierowanych pionowo w górę $\psi_\uparrow$ i pionowo w dół $\psi_\downarrow$ ma postać:

$$\psi = re^{i\frac{\varphi}{2}} \begin{pmatrix} e^{+i\frac{\phi}{2}} \cos\frac{\theta}{2} \\ e^{-i\frac{\phi}{2}} \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_\uparrow \psi \\ \bar{\psi}_\downarrow \psi \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{2}$$

Uwaga: Faza wektorów bazowych $\psi_\uparrow$ i $\psi_\downarrow$ musi być tak dobrana, by

$$(\bar{\psi}_\uparrow \psi)(\bar{\psi} \psi_\downarrow) \in R_+ \quad \text{gdy } \phi = 0.$$

Parametry r, θ, ϕ, φ mogą być wyrażone za pomocą a i b:

$$r = \sqrt{|a|^2 + |b|^2} \tag{3}$$

$$e^{i\frac{\theta}{2}} = \frac{|a| + i|b|}{\sqrt{|a|^2 + |b|^2}} \tag{4}$$

$$e^{i\phi} = \frac{a/b}{|a/b|} \tag{5}$$

$$e^{i\varphi} = \frac{ab}{|ab|} \tag{6}$$

Jak widać nie da się rozseparować ϕ i φ gdy a lub b znika. Wtedy przyjmujemy $\phi = 0$ oraz φ równe fazie nieznikającej współrzędnej (b lub a odpowiednio).

Nie ma sposobu na globalne określenie zmiennej φ (fazy spinora) w sposób gładki. (Nie można uczesać sfery).

Możemy traktować przekształcenie ze zbioru spinorów unormowanych w ich kierunki $\psi \mapsto \vec{n}_\psi$ jako wiązkę włóknistą z bazą w postaci sfery S_2. (Nosi to nazwę rozwłóknienia Hopfa $S_3 \to S_2$).

Jeśli spinor $\psi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ jest unormowany ($\bar{a}a + \bar{b}b = 1$) to wyrażenie na współrzędne wektora kierunku $\vec{n}_\psi$ przybiera szczególnie prostą postać:

$$\begin{aligned} n_z &= \bar{a}a - \bar{b}b \\ n_x + n_y i &= 2\bar{a}b \end{aligned}$$

Naturalne jest zdefiniowanie przeniesienia równoległego spinora po kole wielkim jako obrotu tego spinora w płaszczyźnie zawierającej to koło wielkie, czyli wokół osi prostopadłej do kierunku spinora. Jako przykład rozpatrzymy obrót spinora $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ o kierunku $\vec{n}_\psi = (1, 0, 0)$ wokół osi z o kąt α.
Łatwo zauważyć że

$$\psi' = e^{i\frac{\alpha}{2}\sigma_3}\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} \\ e^{-i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix}$$

zatem

$$\bar{\psi}'\psi = \frac{1}{2}\left(e^{i\frac{\alpha}{2}} + e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right) = \cos\frac{\alpha}{2} \tag{7}$$

Zwróćmy uwagę, że wynik jest liczbą rzeczywistą. Ze względu na niezmienniczość, iloczynu skalarnego względem działania $SU(2)$ wynik ten jest ogólnie prawdziwy.

Lemat

W trakcie przesuwania równoległego po kole wielkim, otrzymujemy spinory, których iloczyny skalarne (ze spinorem wyjściowym, ale także każdego z każdym) są liczbami rzeczywistymi.

Ten fakt można wykorzystać do odwrócenia defninicji: W każdym niewielkim otoczeniu dowolnego punktu przestrzeni bazowej S_2, można zdefiniować przeniesienie równoległe w ten sposób, że jako równoległe (mające “jednakowe” fazy) traktujemy te spinory, których iloczyn skalarny jest liczbą rzeczywistą dodatnią. **Relacja ta nie jest przechodnia.**

Lemat

Spinor przeniesiony równolegle w ten sposób, że jego kierunek zakreśla na sferze S_2 krzywą zamkniętą będącą granicą obszaru o polu S różni się od wyjściowego o czynnik $e^{\frac{1}{2}iS}$.

Uwaga: Ponieważ każda krzywa zamknięta dzieli sferę na dwa obszary o sumie pól równej 4π, więc istotne jest, który z nich nazwiemy literą S.

Stosujemy konwencję, że chodzi o obszar znajdujący się "po prawej stronie" w trakcie poruszanie się po krzywej zamkniętej.

Wynika stąd, że obiegając krzywą w kierunku przeciwnym weźmiemy obszar dopełniający i otrzymamy fazę przeciwną $e^{i\frac{1}{2}(4\pi - S)} = e^{-i\frac{1}{2}S}$.

Uwaga 2: W szczególności przesunięcie równoległe po całym kole wielkim skutkuje zmianą znaku spinora ($e^{i\frac{1}{2}2\pi} = -1$).

Dowód: Lemat wynika z faktu iż takie przeniesienie równoległe można zrealizować za pomocą złożenia obrotów. Wynikowy obrót jest obrotem wokół kierunku spinora wyjściowego, ponieważ wektor ten nie zmienia się po obejściu krzywej zamkniętej. Kąt α jest równy polu obszaru ograniczonego krzywą, natomiast obrót wokół własnej osi o kąt α jest równoważny z pomnożeniem spinora przez $e^{i\frac{1}{2}\alpha}$.

Lemat

Faza iloczynu skalarnego spinorów ψ_1, ψ_2 jest różnicą ich faz, obliczoną w ten sposób, że spinor ψ_1 jest przeniesiony równolegle z $\vec{n}_{\psi_1}$ do $\vec{n}_{\psi_2}$ po mniejszym łuku koła wielkiego.

Dowód: Wynika półtoraliniowości iloczynu skalarnego oraz definicji przesunięcia równoległego.

Wniosek: Mając zdefiniowaną koneksję spełniającą warunki lematu 5 można zdefiniować pojęcie iloczynu skalarnego nie odwołując się do współrzędnych spinora.

Lemat

Faza cyklicznego iloczynu skalarnego:

$$\bar{\psi}_1\psi_2\bar{\psi}_2\psi_3\ldots\bar{\psi}_{n-1}\psi_n\bar{\psi}_n\psi_1 = re^{i\frac{S}{2}} \text{ gdzie } r \in R \tag{8}$$

równa jest połowie pola S "n-kąta" na sferze wyznaczonego przez kierunki $\vec{n}_{\psi_1}, \ldots \vec{n}_{\psi_n}$.

Uwaga: Z Lematu 3 (a także z równiania (7)) wynika, że w równaniu (8) r jest iloczynem kosinusów połówek długości łuków "łamanej".

Uwaga 2: W granicy $n \to \infty$ z Lematu 7 wynika Lemat 5.

Przykład:

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \psi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

$$\bar{\psi}_1\psi_2\bar{\psi}_2\psi_3\bar{\psi}_3\psi_1 = 1(1 + e^{i\phi})1 = 2\cos\frac{\phi}{2} e^{i\frac{\phi}{2}}$$

Faza jest więc równa $\frac{\phi}{2}$. Jest to połowa pola "trójkąta sferycznego" wyznaczonego przez kierunki:

$$\begin{aligned} \vec{n}_{\psi_1} &= (0, 0, 1), \\ \vec{n}_{\psi_2} &= (1, 0, 0), \\ \vec{n}_{\psi_3} &= (\cos\phi, \sin\phi, 0). \end{aligned}$$

Obroty

- Obrót wokół kierunku spinora $=$ mnożenie przez $e^{i\frac{1}{2}\alpha}$
- Obrót wokół osi prostopadłej do kierunku spinora $=$ przesunięcie równoległe po kole wielkim.
- Obrót dowolny jest kombinacją tych dwóch. Należy wykonać:
  - Przesunięcie równoległe po łuku zakreślanym przez kierunek spinora.
  - mnożenie przez $e^{i\frac{1}{2}\alpha\cos\theta}$
    gdzie α - kąt obrotu,
    θ - kąt między kierunkiem spinora a osią obrotu.

Geometryczna interpretacja symetrii

Iloczyn skalarny dwóch spinorów nie zmienia się gdy:

- obrócimy je wokół tej samej osi o ten sam kąt - $SU(2)$.
- obrócimy każdy z nich wokół własnej osi o ten sam kąt - $U(1)$.

Podsumowanie

Zalety:

- Niezależna od współrzędnych izotropowa wizualizacja.
- Prosty wzór na moduł iloczynu skalarnego.
- Możliwość uogólnień - konsystentne koneksje istnieją tylko dla spinów całkowitych i połówkowych.
- Powiązanie rozwłóknienia Hopfa z iloczynem skalarnym spinorów.

Wady:

- Skomplikowane dodawanie - wynika z faktu, jeśli kierunki spinorów się różnią, to dowolny inny jest ich kombinacją liniową.